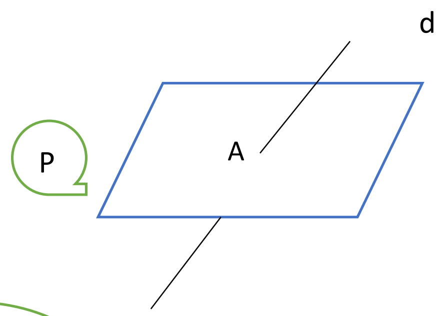
فصل چهارم

۱-اوضاع نسبی خط و صفحه در فضا

خط d و صفحه P $\Rightarrow$

- موازی : $d \parallel P$, $d \cap P = \varnothing$
- متقاطع : $d \nparallel P$, $d \cap P = \{A\}$



$\Leftrightarrow$ $A \in d$, $A \in P$

۲-اوضاع نسبی دو خط در فضا

دریک صفحه است.
الف و ب

خط d و خط d' $\Rightarrow$

- الف) موازی $\Rightarrow$ $d' \parallel d$: $d \cap d' = \varnothing$
- ب) متقاطع $\Rightarrow$ $d' \cap d = \{A\} \Leftrightarrow A \in d$, $A \in d'$
- ج) متنافر $\Rightarrow$ $d \subset P$ و $d \cap d' = \varnothing$, $d' \subset P'$

در دو صفحه
جداگانه اند

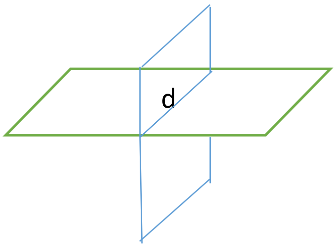
تعریف دو خط متنافر : دو خطی هستند که در یک صفحه نمی باشند.

۳-اوضاع نسبی دو خط در فضا

صفحه P و صفحه P´

- موازی ⟸ $P \parallel P' : P \cap P' = \varnothing$
- متقاطع ⟸ $P \nparallel P' : P \cap P' = d$

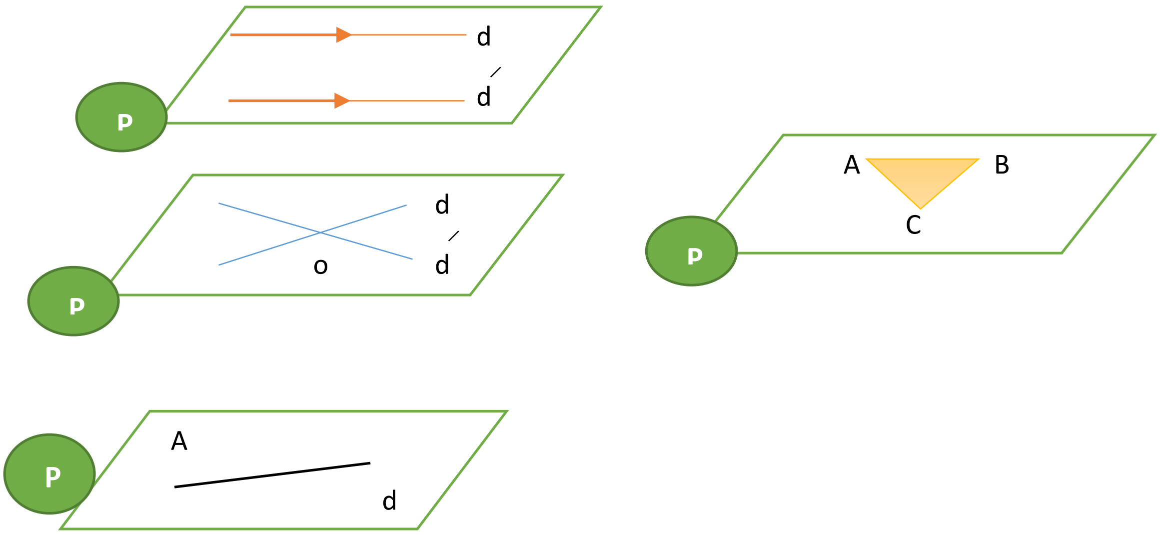
d خط فصل مشترک



$d \subset P$

$d \subset P'$

*نکته: حالات مختلف نشان دادن صفحه

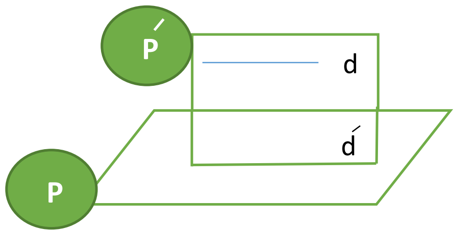


*نکته: حداقل چهار نقطه در فضا وجود دارند که در یک صفحه قرار ندارند.

*قضیه ۱ : اگر خطی با یکی از خط های صفحه موازی باشد، با آن صفحه موازی است.

فرض : $d \| d'$, $d' \subset p$

حکم : $d \| P$



میدانیم دو خط موازی یک صفحه را مشخص می کنند . بنابر این دو خط d و d' صفحه ای مانند P' میگذرد و فصل مشترک آن با صفحه ی P ، خط d' می باشد.

$P \cap P' = d'$

برهان خلف:

نقطه

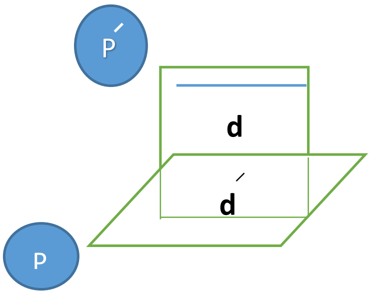
اگر(خلف) $d \nparallel P$ $\Rightarrow$ $d \cap P = \{M\}$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M \in d \quad , \quad d \subset P' \Rightarrow M \in P' \\ M \in P \end{array} \right\} \Rightarrow M \in P \cap P' \Rightarrow \boxed{M \in d'}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M \in d \\ M \in d' \end{array} \right. \Rightarrow M \in d \cap d' \Rightarrow d \nparallel d' \Rightarrow$$ خلاف فرض است

پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

قضیه ۲: اگر خطی با صفحه ای موازی باشد و صفحه ای که از این خط بگذرد و موازی با صفحه ی مفروض نباشد ، صفحه را در خطی قطع می کند که خط مفروض با آن موازی است.



فرض : $d \parallel P \quad , \quad P' \cap P = d'$

حکم : $d \parallel d'$

برهان خلف :

اگر $d \nparallel d'$

$\begin{cases} \text{۱- متنافرند} \\ \text{۲- متقاطع} \end{cases}$

۱- متنافر نیستند چون دو خط d و d' در یک صفحه ی P' قراردارند.

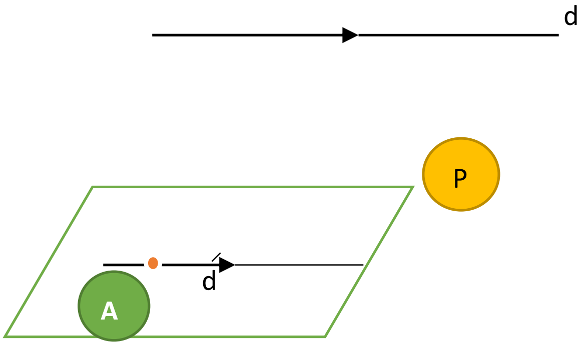
۲- حالت متقاطع بودن : فرض میکنیم دو خط همدیگر را در نقطه A قطع کنند.

$d \cap d' = \{A\} \Rightarrow \begin{cases} A \in d & \text{۱} \\ A \in d' , d' \subset P \Rightarrow A \in P & \text{۲} \end{cases}$

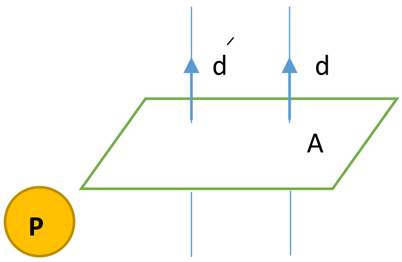
۱ و ۲ $\Rightarrow$ $A \in d \cap P \Rightarrow d \nparallel P$ خلاف فرض است.

یعنی d و P همدیگر را در نقطه ی A قطع کرده اند.

قضیه ۳ : اگر خط d و صفحه P موازی باشند از هر نقطه مانند A از صفحه P خطی مانند d' موازی d رسم شود ، خط d' تماما در صفحه P است.



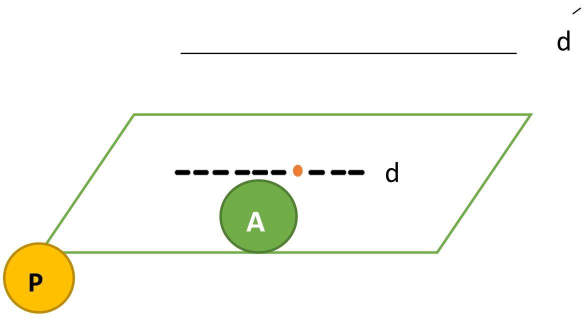
قضیه ۴ : اگر یکی از خطوط موازی صفحه ای را قطع کند دیگری نیز قطع میکند.



فرض : $d \| d'$, $d \nparallel P$

حکم: $P \nparallel d'$

برهان خلف: اگر صفحه P خط d' را قطع نکند موازی آن خواهد بود.

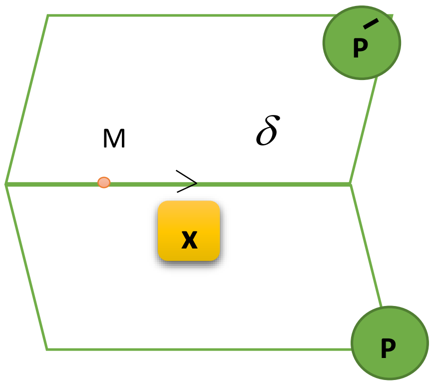


و چون خط d از نقطه $A \in P$ موازی با d' رسم شده باید بر صفحه ی P واقع باشد یعنی d موازی صفحه ی P است . $(d \| P)$ و این خلاف فرض است.

قضیه ۵ : اگر خطی با دو صفحه ی متقاطع موازی باشد ، با فصل مشترک آنها نیز موازی است.

d

فرض: $d \| P \ , \ d \| P' \ , \ P \cap P' = \delta$



حکم: $d \| \delta$

میدانیم از نقطه $M \in \delta$ فقط یک خط مانند Mx میتوان موازی با خط d رسم نمود.($Mx \| d$)

$$M \in \delta \begin{cases} M \in P \\ M \in P' \end{cases}$$

چون Mx از نقطه $M \in P$ موازی با d رسم شده است.

پس:

$Mx \subset P$ 1

چون Mx از نقطه $M \in P'$ موازی با d رسم شده است.

پس:

$Mx \subset P'$ 2

۱ و ۲ $\Rightarrow Mx \subset \underbrace{P \cap P'}_{\delta} \Rightarrow Mx \subset \delta \Rightarrow Mx = \delta$

میدانیم و $Mx \| d \Rightarrow \delta \| d$

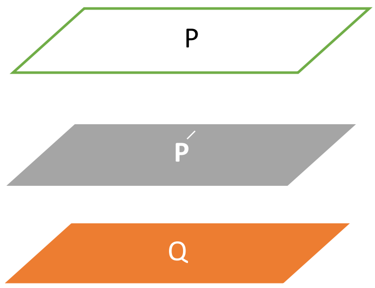
قضیه ۶ : اگر دو صفحه با صفحه ی سومی موازی باشد ، خود موازی یکدیگرند.

فرض: $P \parallel Q \quad , \quad P' \parallel Q$

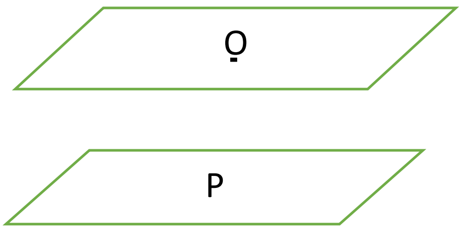
حکم: $P \parallel P'$

برهان : اگر P موازی P' <u>نباشد</u> ، پس متقاطع است.

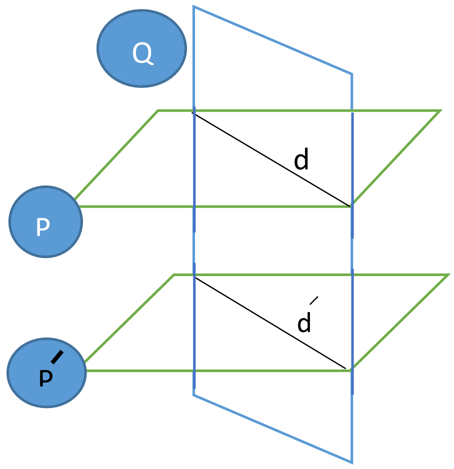
و از هر نقطه فصل مشترک P و P' دو صفحه موازی Q رسم شده که غیر ممکن است.



دقت: از هر نقطه O خارج صفحه P یک و تنها یک صفحه میتوان موازی P رسم کرد.



قضیه ۷ : اگر دو صفحه ی متمایز موازی باشند و صفحه ای یکی از آن ها را قطع کند آنگاه دیگری را نیز قطع نموده و فصل مشترک های آن دوصفحه مزبور دو خط موازی اند.



فرض : $P \parallel P' \quad , \quad P \cap Q = d$

حکم : $P' \cap Q = d' \quad , \quad d \parallel d'$

برهان: اگر دو صفحه ی P' و Q متقاطع نباشند پس موازی خواهند بود . بنابر این دو صفحه ی متقاطع P و Q هردو با صفحه ی P' موازی خواهند بود یعنی از هر نقطه خط d دو صفحه ی موازی با صفحه ی P' رسم شده و این ممکن نیست

---اما اگر $d \nparallel d'$:
$$\begin{cases} \text{الف) متنافر} \\ \text{ب) متقاطع} \end{cases}$$

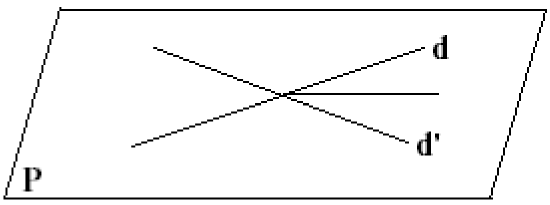
الف) متنافر نیستند چون d و d' در یک صفحه قرار دارند .

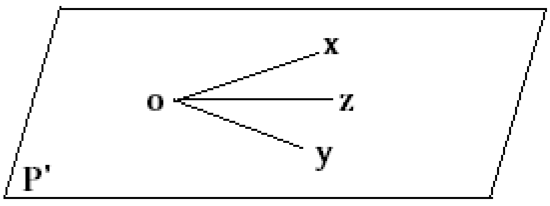
ب) متقاطع بودن :

$$d \nparallel d' \Rightarrow d \cap d' = \{A\} \Rightarrow \begin{cases} A \in d \ , \ d \subset P \Rightarrow A \in P \\ A \in d' \ , \ d' \subset P' \Rightarrow A \in P' \end{cases}$$

$A \in P \cap P' \Rightarrow P \nparallel P'$ ✗ خلاف فرض است.

قضیه ۸ : همه خطوط همرسی که با یک صفحه موازی هستند ، بر صفحه ای موازی با آن صفحه قرار دارند.





برهان: دوخط d و d' را در صفحه ی P در نظر می گیریم از نقطه O خطوط Ox و Oy را موازی خطوط d و d' رسم میکنیم . دو نیم خط Ox و Oy صفحه ی P' را مشخص می کند.

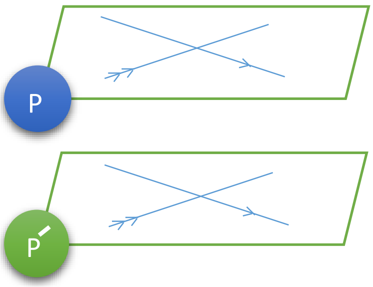
می دانیم طبق شرط توازی دو صفحه هر گاه دو خط ناموازی از صفحه ای با دو خط ناموازی از صفحه ی دیگر موازی باشد ، آن دو صفحه P و P' موازی اند و حال اگر نیم خط Oz را در صفحه ی P' موازی با یکی از خطوط صفحه ی P رسم کنیم ، Oz تماما در صفحه ی P' قرار می گیرد.

سوال: شرط توازی خط و صفحه چیست؟

جواب : خط d با صفحه ی P موازی است اگر و تنها اگر با یکی از خطوط صفحه P موازی باشد.

سوال: شرط توازی دو صفحه چیست ؟

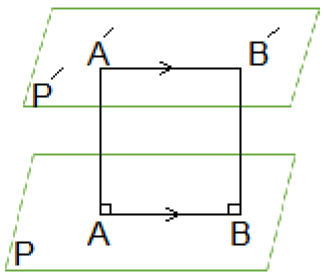
جواب : هر گاه دو خط متقاطع از صفحه ای با دو خط متقاطع از صفحه دیگر موازی باشند آن دو صفحه موازی اند.



قضیه ۹ : پاره خط های موازی محصور بین دو صفحه ی متوازی ، مساویند.

فرض : $AA' || BB'$, $A,B \in P$ / A' , $B' \in P'$

حکم : $AA' = BB'$



برهان: دو خط موازی AA' و BB' صفحه ای را مشخص می کنند که فصل مشترک آن با صفحه ی P و AB و با صفحه ی P' و $A'B'$ می باشد . می دانیم دو صفحه ، صفحه ی سومی را قطع می نماید. فصل مشترک دو صفحه ی مذبور موازی اند بنابراین :

$AB || A'B'$

بنا به فرض :

$$\left.\begin{array}{l} AA' \parallel BB' \\ AB \parallel A'B' \end{array}\right\} \Rightarrow ABB'A' : \text{متوازی الاضلاع} \Rightarrow \boxed{AA' = BB'}$$

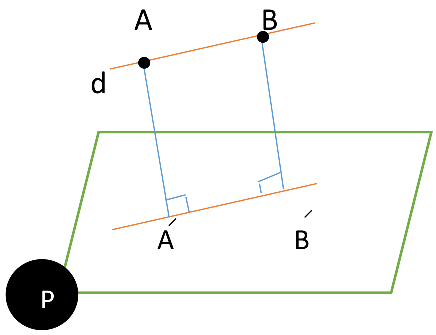
قضیه ۱۰ : پاره خط های متوازی محصور بین یک خط و یک صفحه ی متوازی مساویند.

فرض : $d \parallel P \quad , \quad A,B \in d \; , \quad A',B' \in P \quad , \quad AA' \parallel BB'$

حکم : $AA' = BB'$

برهان : دو خط موازی صفحه ای را مشخص می کنند بنابر این AA' و BB' صفحه ای را مشخص می کنند که فصل مشترک آن با صفحه ی P خط $A'B'$ خواهد بود.

$$d \parallel P \Rightarrow \left.\begin{array}{l} AB \parallel A'B' \\ AA' \parallel BB' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{بنا به فرض}} \boxed{ABB'A' \text{ متوازی الاضلاع}} \Rightarrow \boxed{AA' = BB'}$$



قضیه ۱۱ : صفحه های متوازی بر خط هایی که آن ها را قطع می کنند ، پاره خط هایی ایجاد می کنند که نظیر به نظیر متناسبند.

فرض : $P \| P' \| P''$

حکم : $\dfrac{AB}{\boxed{BC}} = \dfrac{A'B'}{\boxed{B'C'}}$

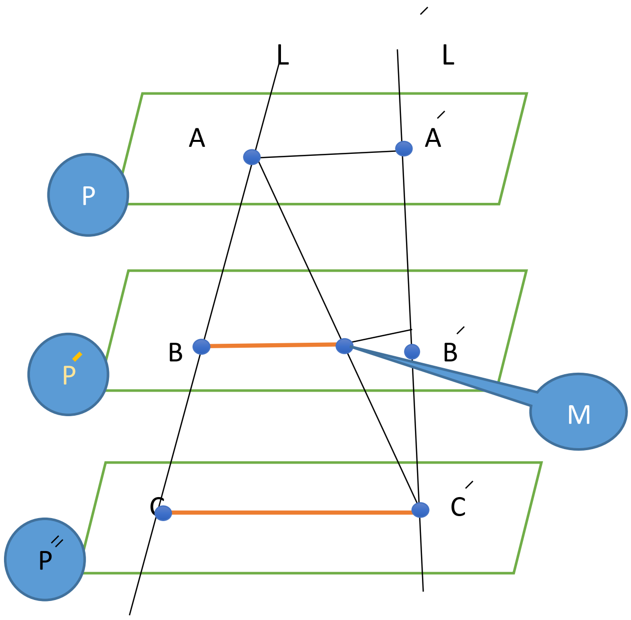
برهان : نقطه ی $A \in P$ را به $C' \in P''$ وصل می کنیم . می دانیم اگر خطی یکی از دو صفحه ی موازی را قطع کند دیگری را نیز قطع می کند. پس خط AC' صفحه ی P' را در نقطه M قطع می کند و اگر صفحه ای دو صفحه ی متوازی را قطع کند فصل مشترک آن دو صفحه ، دو خط موازی اند.

صفحه قاطع

$P \| P'$, $\triangle AA'C'$, $MB' \| AA'$ $\xrightarrow{\text{تالس}}$ $\dfrac{A'B'}{B'C'} = \dfrac{AM}{MC'}$

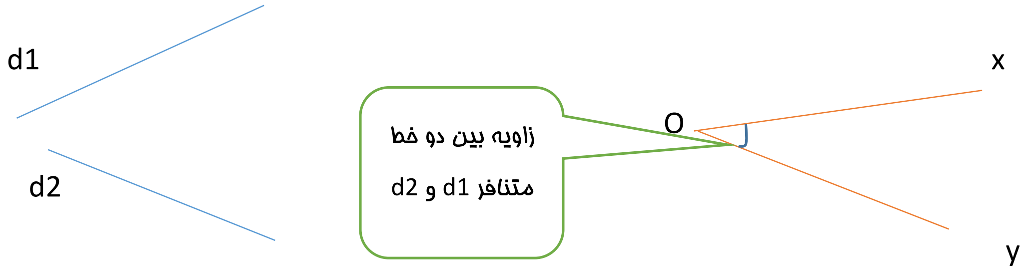
$P' \| P''$, قاطع $\triangle ACC'$, $BM \| CC'$ $\xrightarrow{\text{بنا به تالس}}$ $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AM}{MC'}$

$\Rightarrow \dfrac{A'B'}{B'C'} = \dfrac{AB}{BC}$



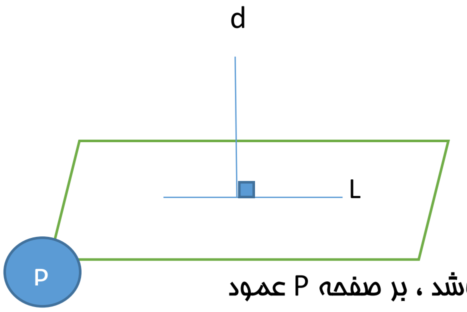
*تعریف زاویه دو خط متنافر: (مهم)

زاویه حاده یا قائمه ای است که از یک نقطه موازی دوخط متنافر رسم شده باشد.



تعریف خط و صفحه عمود بر هم :

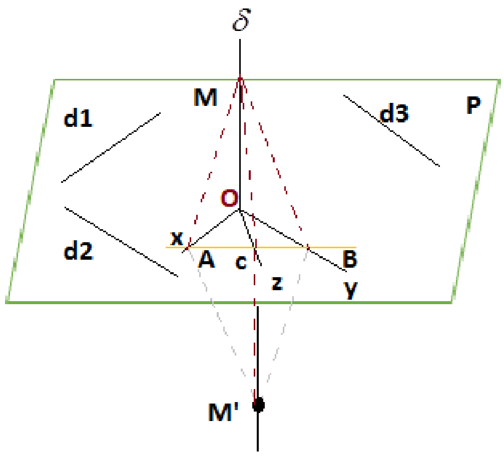
خط را عمود بر صفحه می گویند هر گاه بر هر خط دلخواه از آن صفحه عمود باشد.



$d \perp L$

$L \subset P$ ⟹ $\boxed{d \perp P}$

قضیه ۱۲: هرگاه خطی مانند δ بر دو خط ناموازی صفحه P عمود باشد ، بر صفحه P عمود است.

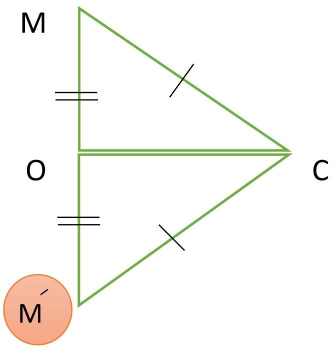


فرض : $d1 \subset P$, $d2 \subset P$, $d1 \nparallel d2$

حکم $\delta \perp P$

برهان : کافی است ثابت کنیم خط δ بر خط d3 از صفحه عمود است . اگر محل برخورد δ با صفحه ی P را O بنامیم و از نقطه O سه نیم خط Ox , Oy , Oz را موازی d1 , d2 , d3 رسم می کنیم. در صفحه ی P خطی چنان رسم می کنیم که سه نیم خط Ox , Oy , Oz را در نقاط A , B , C قطع نماید .

در طرفین نقطه O روی خط δ ، نقاط M و M' را چنان اختیار می کنیم که : $(OM = OM')$



OC عمود منصف MM' است.

*بر خط MM' و نقطه A صفحه ای فرود می دهیم در صفحه مثلث AMM' داریم :

$$\left.\begin{array}{l} OM = OM' \\ OA \perp MM' \end{array}\right\} \Rightarrow$$ OA عمود منصف MM' است $\Rightarrow$ $\boxed{AM = AM'}$

*بر خط MM' و نقطه B صفحه ای فرود می دهیم در صفحه مثلث BMM' داریم :

$$\left.\begin{array}{l} OM = OM' \\ OB \perp MM' \end{array}\right\} \Rightarrow$$ OB عمود منصف MM' است. $\Rightarrow$ $\boxed{BM = BM'}$

*برای دو مثلث AMB و AM'B داریم :

$$\left.\begin{array}{l} AM = AM' \\ BM = BM' \\ AB = AB \text{ مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow AMB \cong AM'B \Rightarrow AMB = AM'B$$

* برای دو مثلث AMC و AM'C داریم :

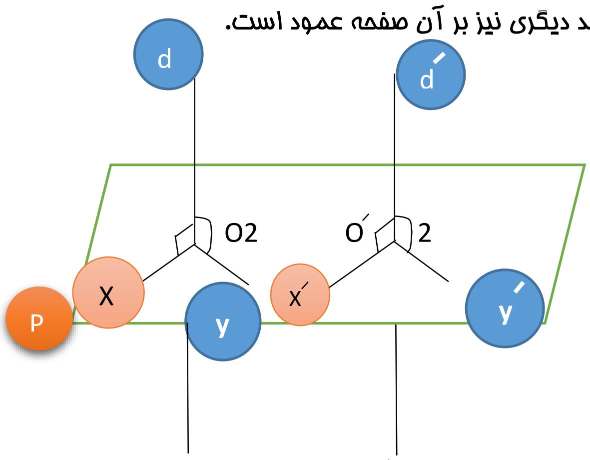
$$\left.\begin{array}{l} AM = AM' \\ AC = AC \\ AMB = AM'B \end{array}\right\} \Rightarrow AMC = AM'C \Rightarrow MC = M'C$$

داریم $\begin{cases} M\acute{c} = Mc \\ OM = OM \end{cases}$

Oc عمود منصف $M\acute{M}$ است ← $\delta \perp Oc$ ← $\delta \perp OZ$

$OZ \parallel d3$ ← $\delta \perp d3$ ← $\delta \perp P$

تمرین : ثابت کنید اگر یکی از دو خط موازی بر صفحه ای عمود باشد دیگری نیز بر آن صفحه عمود است.



فرض : $d \parallel \acute{d}$, $d \perp P$ $\quad O1 = 90$

حکم : $\acute{d} \perp P$

برهان : از نقطه O و $\acute{O}$ خطوط Ox و $\acute{O}\acute{x}$ را موازی هم رسم میکنیم و زوایای $\hat{O1}$, $\hat{O2}$ چون اضلاع متناظر شان موازی هم جهت است پس با هم برابرند.

$O1 = \acute{O}1 = 90$

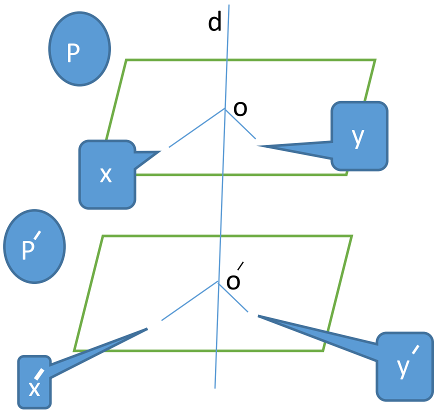
از نقاط O و $\acute{O}$ خطوط Oy و $\acute{O}\acute{y}$ را موازی هم رسم میکنیم:

$O2 = \acute{O}2 = 90$

بنابراین : $\acute{O}1 = \acute{O}2 = 90$ ← $d \perp \acute{O}\acute{x}$ ، $d \perp \acute{O}\acute{y}$ ← $d \perp P$

بنا تعریف اگر خطی بر دو خط ناموازی از صفحه عمود باشد بر صفحه عمود نیز عمود است.

تمرین : ثابت کنید خطی که بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد ، بر دیگری نیز عمود است .(مهم)



فرض : $P \parallel \acute{P}$, $d \perp P$

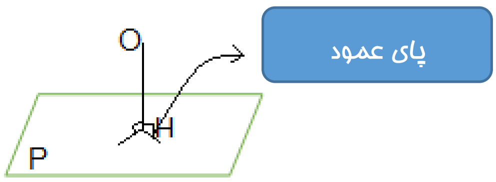
حکم : $d \perp \acute{P}$

برهان : از نقطه O دو نیم خط $O'x'$ و $O'y'$ را موازی با Ox و Oy از صفحه ی P رسم می کنیم چون d بر صفحه ی P عمود است پس بر هر دو خط Ox و Oy عمود است . بنابراین بر موازی آن ها یعنی خطوط $O'x'$ و $O'y'$ نیز عمود است و چون خط d بر دو خط ناموازی Ox و Oy از صفحه P عمود است بنا به تعریف بر صفحه ی P عمود است.

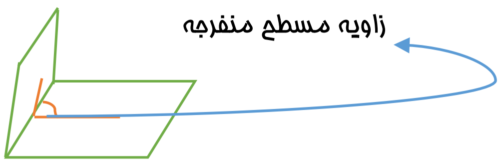
<u>فاصله نقطه از صفحه</u> :

عبارت است از طول پاره خطی است که از نقطه بر صفحه عمود شده باشد.

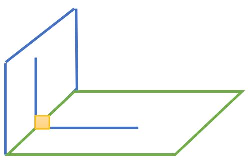
OH= فاصله نقطه O از صفحه P



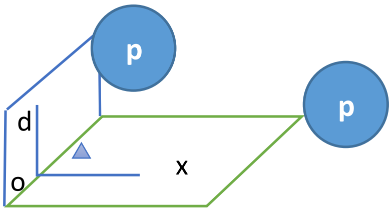
زاویه ی دو صفحه : اگر دو صفحه <u>متقاطع باشند زاویه بین دو صفحه</u> زاویه ی مسطح منفرجه ای است که <u>از تقاطع آنها پدید می آید</u>.



دو صفحه برهم عمودند → قائم =۹۰= زاویه مسطح منفرجه →



قضیه : اگر خطی بر صفحه ای عمود باشند هر صفحه ای که از آن خط مفروضی بگذرد بر آن صفحه عمود است.



فرض : $d \perp P \quad , \quad d \subset P'$

حکم : $P \perp P'$

برهان : چون خط d بر صفحه ی P عمود است آن صفحه را در نقطه O قطع می کند اگر صفحه ی P' را بر خط d مرور دهیم، فصل مشترک آن با صفحه ی P خطی مانند $\triangle$ خواهد بود که از نقطه O می گذرد . از نقطه O در صفحه ی P نیم خط Ox را عمود بر $\triangle$ رسم می کنیم :

$d \perp P \Rightarrow d \perp \triangle \quad , \quad d \perp Ox \Rightarrow dox = ۹۰$

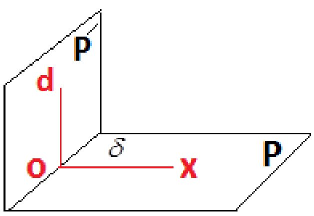
چون $\triangle$ در صفحه P است.

از طرفی dox زاویه مسطح منفرجه بوده و چون اندازه ی آن ۹۰ است پس میتوان نتیجه گرفت که :

$P' \perp P$

قضیه :اگر دو صفحه برهم عمود باشند هر خط که یکی ازآن ها بر فصل مشترک آن عمود باشد ، بر صفحه ی دیگری عمود است.

فرض : $P \perp P' \; , \; P \cap P' = \delta \; , d \subset P' \; , \; d \perp \delta$



حکم : $d \perp P$

برهان : از نقطه O نیم خط Ox را در صفحه ی P بر خط δ عمود می کنیم.

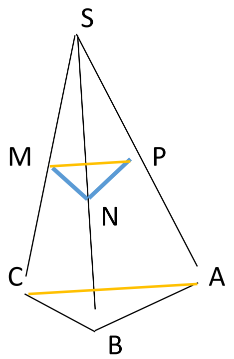
زاویه dox زاویه مسطح بود و چون $P' \perp P$ نتیجه می شود : $dox = 90$

$\widehat{dox} = 90 \qquad d \perp Ox \ , \quad d \perp \delta$

در نتیجه خط d بر دو خط متقاطع Ox و δ عمود است پس بر صفحه ی P عمود خواهد بود.

تمرین های مربوط به فصل چهارم هندسه II

۱- ثابت کنید در یک هرم ، وسط یال های آن ، در یک صفحه ی موازی قاعده قرار دارند .



$$SAB : \ \frac{SP}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PN \| AB \quad (۱)$$

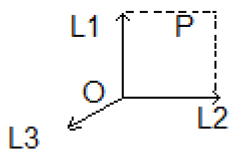
$$SBC : \ \frac{SN}{SB} = \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} NM \| BC \quad (۲)$$

۱ و ۲ ⟵ مثلث PNM موازی مثلث ABC است.

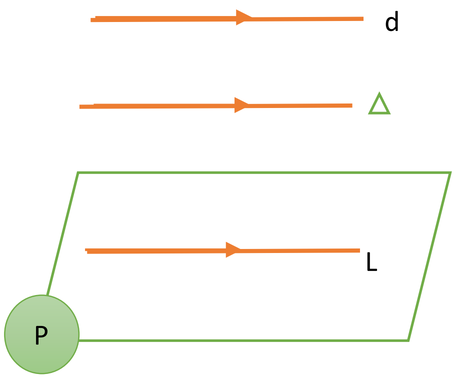
۲- اگر سه خط L1 و L2 وL3 دو به دو متقاطع باشند ، ثابت کنید این سه خط یا در یک صفحه قرار دارند یا همرسند.

برهان : از دو خط L1 و L2 صفحه ی P را می گذرانیم اگر L3 در صفحه ی P باشد ، حکم برقرار است.

در صورتی که L3 در صفحه ی P نباشد ، چون L3 با L1 و L2 متقاطع است پس صفحه ی P را در نقطه ی مشترک L1 و L2 قطع می کند زیرا در غیر اینصورت باید صفحه را در دونقطه متمایز قطع کند یعنی L3 *تماما* در صفحه ی P قرار می گیرد که این خلاف فرض است.



۳-اگر صفحه ای با یکی از دوخط موازی ، موازی باشد ، با دیگری هم موازی است.



فرض : d||△ , P||△

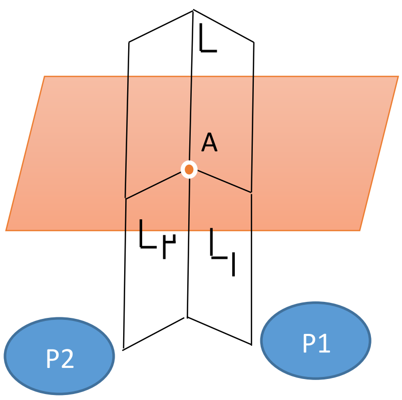
حکم : P||d

چون P||△ است پس خط △ با یک خط صفحه ی P مانند L موازی است چون d||△ است پس d||L است در نتیجه:

P||d

۴-از نقطه ی A روی خط L ، صفحه ای بر خط L عمود کنید (طریقه ی رسم را توضیح دهید)

می توانیم از خط L بی شمار صفحه بگذرانیم دوصفحه ی متمایز از این صفحه ها را P1 و P2 می نامیم . از نقطه ی A در صفحه ی P1 خط L1 را عمود بر L رسم می کنیم به طور مشابه از نقطه A در صفحه ی P2 ، خط L2 را عمود بر L رسم میکنیم. خط های L1 و L2متقاطعند و خط L بر هردوی آن ها عمود است .طبق قضیه اساس تعامد ، خط L بر صفحه ی گذرنده از L1 و L2 نیز عمود است این صفحه ، همان صفحه ی مطلوب است.



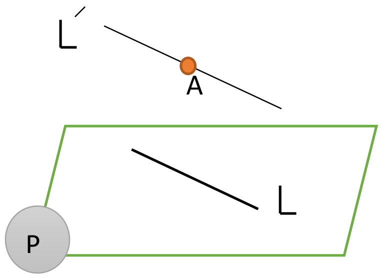
۵-ابتدا از نقطه ی A خارج صفحه ی P ، خطی موازی P را رسم کنید.(روش رسم را توضیح دهید)

سپس مشخص کنید چند خط میتوان از یک نقطه ی مفروض ، موازی یک صفحه مفروض گذارند.

سوال امتحان نهایی:

در صفحه ی P خط دلخواه L را رسم می کنیم سپس از نقطه ی A ، خط L' را موازی L رسم می کنیم. L' با یکی از خط های صفحه ی P موازی است پس خط L با صفحه ی P موازی است.

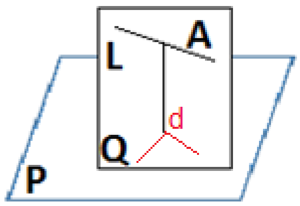
- بی شمار خط از نقطه ی A به موازات صفحه ی P می توان رسم کرد.



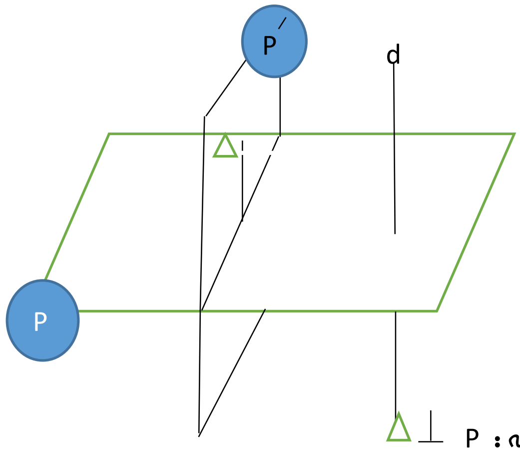
۶- اگر خط L بر صفحه ی P عمود نباشد صفحه ای از خط L بگذرانید که بر صفحه ی P عمود باشد (با رسم شکل)

از نقطه دلخواه A روی خط L خط d را عمود بر صفحه ی P رسم می کنیم از دوخط متقاطع d و L صفحه ی Q را میگذاریم

چون صفحه ی Q شامل خط d است پس بر صفحه ی P است.



۷- اگر دو صفحه ی P و P بر هم عمود باشند ثابت کنید هر خط عمود بر صفحه ی P با صفحه ی P موازی است.



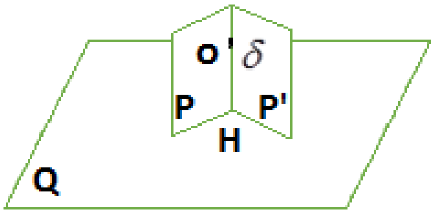
فرض : $P \perp P'$, $d \perp P$

حکم : $d \parallel P'$

چون $P' \perp P$ پس خطی مانند $\triangle$ در صفحه ی P' قرار دارد به طوریکه : $\triangle \perp P$

$$\left\{\begin{array}{l} \triangle \perp P \\ d \perp P \end{array}\right. \Rightarrow d \parallel \triangle \Rightarrow d \parallel P'$$

قضیه : اگر دو صفحه ی متقاطع بر صفحه ای عمود باشد ، فصل مشترک آنها نیز بر آن صفحه عمود خواهد بود.



فرض : $P \cap P' = \delta$

$P \perp Q \quad , \quad P' \perp Q$

حکم : $\delta \perp Q$

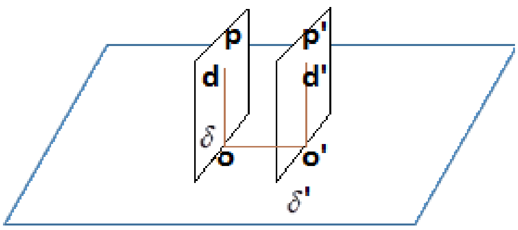
برهان: نقطه O را بر فصل مشترک دو صفحه انتخاب کرده از O عمود OH را بر صفحه Q وارد می کنیم.($OH \perp Q$)

$$\left.\begin{array}{ll} P \perp Q \ , \ O \in P \ , \ OH \perp Q & OH \subset P \\ P' \perp Q \ , \ O \in P' \ , \ OH \perp Q & OH \subset P' \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow OH \subset P \cap P' = \delta \Rightarrow OH = \delta \Rightarrow \delta \perp Q$$

$OH \perp Q$

تمرین : اگر صفحه ای بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد بر دیگری هم عمود است.



فرض : $P' || P \quad , \quad P \perp Q$

حکم : $P' \perp Q$

برهان: چون صفحه ی P بر Q عمود است ، زاویه مسطح آن قائم خواهد بود . با رسم زاویه مسطح $Q \delta P$ خط QO' ایجاد می شود که در نقطه O' صفحه ی P' را قطع می کند از نقطه O' در صفحه ی P' خط d' را موازی با d رسم می کنیم.

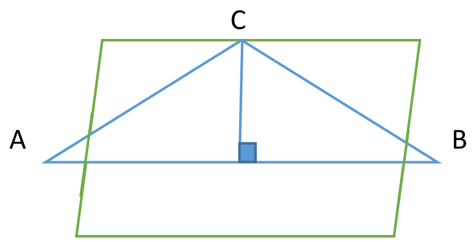
$$d || d' \ , \ d \perp Oo' \Rightarrow d' \perp Oo' \Rightarrow P' \delta' Q = 90 \Rightarrow P' \perp Q$$

*تعریف صفحه ی عمود منصف یک پاره خط :

صفحه ای را که در وسط یک پاره خط بر آن عمود باشد، صفحه ی عمود منصف آن پاره خط می نامیم.

قضیه : (صفحه ی عمود منصف)

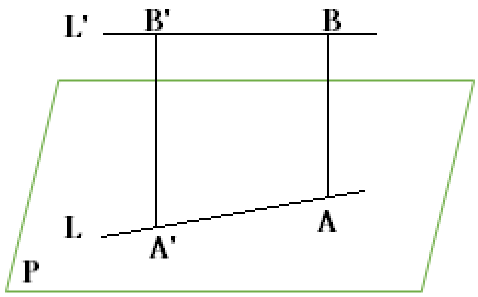
صفحه ی عمود منصف یک پاره خط ، مکان هندسی نقاطی از فضا است که از دوسر آن پاره خط به یک فاصله اند.



برهان : فرض کنید A وB دو نقطه متمایز در فضا ، P صفحه ی عمود منصف پاره خط AB باشد وسط پاره خط AB را H می نامیم اگر C نقطه ای از این صفحه و متمایز H باشد ، در صفحه ای که از سه نقطه A,B,C می گذرد خط CHعمود منصف پاره خط AB است:

AC = BC

قضیه : عمود مشترک دو خط متنافر یکتا است.



(برهان خلف)

بردو خط متنافر L و 'L دو عمود مشترک مانند AB و 'A'B در نظر بگیرید اگر P صفحه ای باشد که با 'L و L موازی است.

(هردو خط L و 'L که موازی اند یک صفحه را مشخص می کنند) پس دو خط AB و 'A'B بر صفحه P عمود است.

پس AB و 'A'B موازی اند. بنابراین چهار ضلعی 'ABB'A یک مستطیل است یعنی خط های L و 'L در یک صفحه قرار دارند و این خلاف فرض است .

(چون دو خط متنافر باید در دوصفحه جداگانه باشند)